

# Kompetenzprofile der Fächer an den Studienkollegs

Mathematik

Kurs T, M und W

## 1. Selbstverständnis des Faches und sein Beitrag zur Kompetenzförderung

Mathematische Kompetenzen schaffen wesentliche Voraussetzungen für die Erkenntnisgewinnung in den unterschiedlichsten Disziplinen und Fächern und sind damit grundlegend für die Naturwissenschaften und die Technik. Darüber hinaus dienen mathematische Methoden in Wirtschaft, Politik sowie in den Sozialwissenschaften der Objektivierung und der Strukturierung komplexer Sachverhalte.

Zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts an den Studienkollegs ist es, dass die Studierenden im Rahmen des Aufbaus mathematischer Kompetenzen konkrete mathematische Kenntnisse und Arbeitsweisen weiterentwickeln. Kennzeichnend dafür sind die selbstständige und präzise Anwendung der mathematischen Fachsprache, folgerichtige Gedankenführung und Argumentation, systematisches Vorgehen sowie das Erfassen von Zusammenhängen. Ziel des Unterrichts ist es, dass die Studierenden eine Souveränität entwickeln im Ermitteln, Reflektieren und Vergleichen von Lösungswegen für mathematische Problemstellungen.

Die Studierenden erwerben im Unterricht folgende mathematische Kompetenzen:

- Mathematik als logische und abstrakte Wissenschaft mit ihrer eigenen Sprache und Struktur zu verstehen und vor diesem Hintergrund problemorientiert anzuwenden.
- Naturwissenschaftliche Begebenheiten, bestimmte Sachverhalte und Problemstellungen auf verschiedene Arten mathematisch darzustellen bzw. den unterschiedlichen mathematischen Darstellungen entsprechende Informationen zu entnehmen.
- Mathematik als Hilfsmittel zur Erkenntnisgewinnung, aber auch zur kritischen Hinterfragung vorliegender Erkenntnisse einzusetzen.

## 2. Kompetenzbereiche

### Modellieren

Erfassung und Strukturierung von zunehmend komplexeren Sachsituationen bezüglich einer konkreten Fragestellung, um Lösungsansätze zu finden. Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation.

### Darstellen

Übersetzung von zunehmend komplexen Sachsituationen in mathematische Modelle und Lösung eines gegebenen Problems innerhalb eines mathematischen Modells mithilfe ma-

thematischer Kenntnisse und Fertigkeiten sowie Zuordnung eines mathematischen Modells zu verschiedenen Sachsituationen. Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln.

### **Problemlösen**

Analyse und Strukturierung einer Problemsituation, Entwickeln einer Lösungsstrategie, Auswählen und Anwenden geeigneter Verfahren zur Lösungsfindung, Berücksichtigung einschränkender Bedingungen sowie zielgerichtete Ausführung eines Lösungsplans. Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege.

### **Argumentieren**

Verknüpfung von Argumenten zu vollständigen Argumentationsketten und Nutzung verschiedener Argumentationsstrategien sowie Überprüfung, ob Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können. Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen.

### **Kommunizieren**

Erfassung, Strukturierung und Formalisierung von Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen; Erläuterung von mathematischen Begriffen in Sachzusammenhängen. Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache.

### **Werkzeuge nutzen**

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie beispielsweise Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

## **Kurs T 3. Kompetenzerwartung**

Die Studierenden ...

- wenden grundlegende Fachbegriffe und Rechentechniken der Algebra und der Analysis zunehmend selbstständig an, um Aufgaben und Problemstellungen erfolgreich zu bearbeiten.
- unterscheiden zwischen Relation und Funktion sowie der jeweiligen Darstellungsform, um daraus elementare Abbildungseigenschaften zu bestimmen.
- wenden Beweistechniken an, um logische Argumentationen darzustellen.
- kennen die Eigenschaften von Folgen und Reihen, um diese nachzuweisen.

- entwickeln bei einfachen Funktionsgleichungen eine Vorstellung vom prinzipiellen Verlauf des Funktionsgraphen, um umgekehrt aus dem Verlauf des Funktionsgraphen den Funktionstyp zu ermitteln und um funktionale Zusammenhänge in den naturwissenschaftlichen Fächern zu analysieren.
- leiten bei einfachen Funktionen den Differentialquotienten her und wenden ihn und den dazugehörigen mathematischen Formalismus sicher an, um die Ableitungen von einfachen Funktionen zu bestimmen.
- unterscheiden zwischen der ersten und den höheren Ableitungen, um Funktionsgraphen im Rahmen von Kurvendiskussionen zu analysieren.
- verstehen die grundlegenden Integrationsregeln, um bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale sowie Flächen, die von Funktionsgraphen begrenzt werden, zu berechnen.
- wenden die entsprechenden Integrationsregeln an, um die Volumina von Rotationskörpern zu berechnen.
- wenden die Rechenregeln und Rechenoperationen für Vektoren an, um die grundlegenden Eigenschaften eines Vektorraums nachzuweisen.
- nutzen Kenntnisse der Matrizenrechnung und der Determinantenberechnung, um homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme auf Lösbarkeit zu analysieren, die Lösungsmenge zu bestimmen und geometrisch zu interpretieren.
- verwenden Symbole und Operatoren der Aussagenlogik sowie der Mengenlehre eigenständig und sicher, um Argumentationen logisch zu analysieren, wahre Aussagen zu beweisen und falsche Aussagen zu widerlegen.

## **Kurs T** 4. Inhalte des Fachunterrichts

### a) Basisinhalte

#### **Analysis:**

- Grundlagen der Aussagenlogik und der Mengenlehre
- Zahlenbereiche
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
- Beweismethoden
- Folgen als Funktionen mit dem Definitionsbereich natürliche Zahlen und deren Eigenschaften (Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz)
- Berechnung von Reihen
- reelle Funktionen und deren Eigenschaften: lineare und quadratische Funktionen, ganz- und gebrochenrationale Funktionen, Wurzelfunktionen, trigonometrische Funktionen und Arcus-Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktionen
- Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
- Differentialrechnung: Tangentenproblem, Differenzen- und Differentialquotient, Ableitungsregeln, Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben
- Anwendung der Differentialrechnung in den naturwissenschaftlichen Fächern

- Integralrechnung: bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integrationsregeln und Integrationsmethoden, uneigentliche Integrale, Flächen- und Volumenberechnung mittels Integration, Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale
- Anwendung der Integralrechnung in den naturwissenschaftlichen Fächern

#### **Lineare Algebra und Analytische Geometrie:**

- elementare Vektoralgebra: Vektorraum, Rechnen mit Vektoren
- Matrizen und Determinanten und deren Anwendung beispielsweise bei linearen Abbildungen
- homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme und deren geometrische Veranschaulichung im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum

### **b) mögliche Ausdifferenzierungen bzw. Erweiterungen der Basisinhalte**

#### **Analysis:**

- Strahlensätze, Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks
- Konvergenzkriterien von Reihen, Potenzreihen
- Taylor-Entwicklung
- hyperbolische Funktionen und Area-Funktionen
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- darstellende Geometrie

## **Kurs M 3. Kompetenzerwartung**

Die Studierenden ...

- wenden grundlegende Fachbegriffe und Rechentechniken der Algebra und der Analysis zunehmend selbstständig an, um Aufgaben und Problemstellungen erfolgreich zu bearbeiten.
- entwickeln bei einfachen Funktionsgleichungen eine Vorstellung vom prinzipiellen Verlauf des Funktionsgraphen, um umgekehrt aus dem Verlauf des Funktionsgraphen den Funktionstyp zu erkennen und zu ermitteln und um funktionale Zusammenhänge in Naturwissenschaften und Technik zu analysieren.
- leiten bei einfachen Funktionen den Differentialquotienten her und wenden ihn und den dazugehörigen mathematischen Formalismus insbesondere in den Naturwissenschaften sicher an, um Funktionen auch anwendungsbezogen zu analysieren.
- verstehen die grundlegenden Integrationsregeln, um bestimmte und unbestimmte Integrale sowie Flächen, die von Funktionsgraphen begrenzt werden, zu berechnen und insbesondere in den Naturwissenschaften anzuwenden.
- bereiten im Rahmen der univariaten Statistik das Datenmaterial einer statistischen Erhebung unter Verwendung der entsprechenden Parameter auf und nutzen die verschiedenen Möglichkeiten der graphischen Darstellung, um sie entsprechend zu präsentieren.
- analysieren graphische Darstellungen, um daraus die wesentlichen Informationen zu ermitteln und fachsprachlich korrekt darzulegen.

- erstellen Kontingenztafeln, um Aussagen über Zusammenhänge zwischen Merkmalen abzuleiten und zu interpretieren.
- untersuchen metrisch skalierte Merkmale auf linearen Zusammenhang, bestimmen die Stärke dieses Zusammenhangs und bestimmen graphisch und rechnerisch die Gleichung der Regressionsgeraden, um damit Prognosen zu erstellen.

## **Kurs M** 4. Inhalte des Fachunterrichts a) Basisinhalte

### **Analysis:**

- Funktionen und deren Darstellung
- Funktionen und deren Eigenschaften: Potenzfunktionen, ganzrationale Funktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktionen
- Differentialrechnung: Differenzenquotient, Differentialquotient/Ableitung, Ableitungsregeln
- Anwendung der Differentialrechnung auf die oben genannten Funktionen
- Anwendung der Differentialrechnung in den Naturwissenschaften
- Integralrechnung: unbestimmtes und bestimmtes Integral, Integrationsregeln und einfache Integrationsmethoden, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendung der Integralrechnung in den Naturwissenschaften

### **Grundkonzepte der beschreibenden Statistik:**

- Stichprobe, Merkmal, Skala, Häufigkeiten
- Häufigkeitsverteilungen und ihre graphischen Darstellungen
- Lage- und Streumaße
- Kontingenztafel
- lineare Regression und Korrelation

## **b) mögliche Ausdifferenzierungen bzw. Erweiterungen der Basisinhalte**

### **Analysis:**

- Relationen und deren Darstellung
- Grenzwerte von Funktionen
- graphisches Differenzieren

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik:**

- Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Verknüpfung von Ereignissen, Zufallsvariable
- Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- bedingte Wahrscheinlichkeiten, deren Berechnung und Anwendung
- spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Hypothesentests

### Kurs W 3. Kompetenzerwartung

Die Studierenden ...

- wenden grundlegende Fachbegriffe und Rechentechniken der Algebra und der Analysis zunehmend selbstständig an, um Aufgaben und Problemstellungen erfolgreich zu bearbeiten.
- entwickeln bei einfachen Funktionsgleichungen eine Vorstellung vom prinzipiellen Verlauf des Funktionsgraphen, um umgekehrt aus dem Verlauf des Funktionsgraphen den Funktionstyp zu erkennen und zu ermitteln und um funktionale ökonomische Zusammenhänge zu analysieren.
- leiten bei einfachen Funktionen den Differentialquotienten her und wenden ihn und den dazugehörigen mathematischen Formalismus insbesondere in den Wirtschaftswissenschaften sicher an, um Funktionen auch anwendungsbezogen zu analysieren.
- unterscheiden zwischen der ersten und den höheren Ableitungen, um Funktionsgraphen im Rahmen von Kurvendiskussionen zu analysieren.
- nutzen die Regeln der Differential- und Integralrechnung, um ökonomische Modelle zu Konsumententscheidungen von Haushalten und Produktions- und Absatzentscheidungen von Unternehmen zu formulieren und zu analysieren.
- wenden grundlegende Kenntnisse in den Konzepten der deskriptiven und explorativen Statistik an, um Daten zum Wirtschaftsgeschehen aufzubereiten, auszuwerten, zu interpretieren und zu präsentieren.
- kennen die wesentlichen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, um sich mit Schätzverfahren und Testverfahren der Ökonometrie vertraut zu machen.
- verwenden arithmetische und geometrische Folgen, um die Formeln und Konzepte der Finanzmathematik zu verstehen.

### Kurs W 4. Inhalte des Fachunterrichts a) Basisinhalte

**Analysis:**

- Zahlenmengen
- arithmetische Grundoperationen
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
- lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Vektoren
- reelle Funktionen und deren Eigenschaften: lineare und quadratische Funktionen, ganz- und gebrochenrationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktionen
- Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
- Differentialrechnung: Differenzen- und Differentialquotient, Ableitung, Ableitungsregeln, Kurvendiskussionen
- Beispiele ökonomischer Funktionen
- Integralrechnung: bestimmtes und unbestimmtes Integral, einfache Integrationsregeln, Anwendung des bestimmten Integrals zur Berechnung von Flächeninhalten

- ökonomische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

**Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung:**

- Methoden und Aufgaben der Statistik und Grundbegriffe
- univariate Deskription und Exploration von Daten
- multivariate Deskription und Exploration von Daten

**b) mögliche Ausdifferenzierungen bzw. Erweiterungen der Basisinhalte**

**Analysis:**

- Folgen und Reihen
- multivariate Analysis: Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher und Optimierung unter Nebenbedingungen (Lagrange-Verfahren)

**Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung:**

- Schätz- und Testverfahren der Ökonometrie
- Definition und Begriff der Wahrscheinlichkeit und deren empirische Interpretation
- bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen, Satz von Bayes
- Wahrscheinlichkeitsbestimmung von Ergebnissen und Ereignissen